

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA ARHITEKTURO, GRADBENIŠTVO IN GEODEZIJO
RAČUNSKI CENTER

PUBLIKACIJA ŠTEV. 8

Janez Reflak

F E A P S

Opis programa

LJUBLJANA, 1974

Fajm

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo

Računski center

Publikacija št. 8

Janez Reflak

F E A P S

Opis programa

Ljubljana, 1974

Samo za interno uporabo

V S E B I N A

	str.
Predgovor	
PROGRAM F E A P S	2
1.0 UVOD	2
2.0 METODA KONČNIH ELEMENTOV	3
3.0 DOLOČITEV MREŽE ELEMENTOV TER TIPI ELEMENTOV	8
4.0 ELEMENTI	10
4.1 Štirikotni elementi	11
4.11 Navadni štirikotni elementi - VK elementi	11
4.12 Štirikotni elementi na elastični podlagi - - VS elementi	14
4.2 Trikotni elementi	15
4.21 Trikotni element z vrhom levo - DL element	17
4.22 Trikotni element z vrhom desno - DR element	18
4.3 Gredni element	19
5.0 Topologija	21
6.0 OBTEŽBA	23
7.0 ROBNI POGOJI	25
8.0 MATERIALI	26
9.0 REZULTATI	27
9.1 Rezultati za plošče	27
9.2 Rezultati za rebraste plošče	29
Zaključek	32
Literatura	32
Vrstni red kartic s podatki	33
Dodatek	34

PREDGOVOR

Račun navadnih gladkih in rebrastih plošč je danes vsakodnevna naloga v statiki ploskovnih konstrukcij. Rešitve plošč so zelo enostavne in analitično podane, če gre za primere enostavnih plošč z regularnimi oblikami in enostavnimi obtežbami. V primeru poljubnih oblik plošč s poljubnim podprtjem in poljubnimi obtežbami pa kakršnakoli analitična rešitev praktično ne pride v poštev. V tem primeru se ali poslužimo zelo grobih aproksimacij n.pr. nadomeščanje z linijskimi elementi ali pa če želimo točnejše rešitve, se poslužimo elektronskih računalnikov, ki nam omogočajo izračun takšnih plošč po raznih metodah. Kadar uporabljamo elektronske računalnike pri računanju poljubnih plošč se pri nas v glavnem poslužujemo naslednjih dveh metod:

a) Metoda z DIFERENČNIMI ENAČBAMI

b) Metoda KONČNIH ELEMENTOV

Danes, ko že tudi pri nas imamo na razpolago računalnike velikih kapacitet, uporabljamo pri praktičnih izračunih v glavnem drugo metodo t.j.

METODO KONČNIH elementov in sicer DEFORMACIJSKO METODO KONČNIH ELEMENTOV. Bistvena razlika med obema zgornjima metodama je ta, da so za drugo že na razpolago zelo obsežni dobri programi, ki zahtevajo le najosnovnejše podatke o konstrukciji in obtežbi, ves ostali postopek izračuna statičnih količin in deformacij pa je popolnoma avtomatičen. Torej uporaba metode končnih elementov pri numeričnem računanju problemov teorije elastičnosti in plastičnosti z računalniki v inženirski praksi zavisi predvsem v prvi vrsti od možnosti uporabe ustreznih dobrih programov za računalnike. V zadnjih 15 letih se je zelo razvila metoda končnih elementov za račun poljubnih dvodimenzionalnih tankih, linearno-elastičnih plošč in rebrastih plošč. Osnovo tej celotni teoriji so s svojim pionirskimi delom postavili ARGYRIS, CLOUGH, MELOSH in ZIENKIEWICZ. Bistvo metode končnih elementov je razdelitev celotne konstrukcije na dele, ki so geometrijsko enostavnih oblik.

V tej publikaciji bo v glavnem podan opis programa FEAPS (Finite Element Analysis of Plate Structures), ki je narejen na osnovi metode KONČNIH Elementov in omogoča avtomatičen račun rebrastih in navadnih izotropnih ali ortotropnih plošč. Opis programa obsega predvsem opis elementov, ki jih program uporablja, način razdelitve konstrukcije na elemente, opis oblik delež robnih pogojev ter vse možnosti, ki jih program nudi statiku.

Detajlnejša navodila s konkretnimi primeri za pripravo podatkov za program FEAPS bodo izšla v eni izmed naslednjih publikacij RC FAGG. Program FEAPS je RC FAGG dobil od ETH Zürich in je edini tovrstni program pri nas.

PROGRAM FEAPS

1.0 UVOD

V zadnjih letih se je metoda končnih elementov zelo razvila in z uporabo elementov z večjim številom prostostnih stopenj daje vedno bolj točne rezultate tudi ob razdelitvi konstrukcij na manjše število elementov.

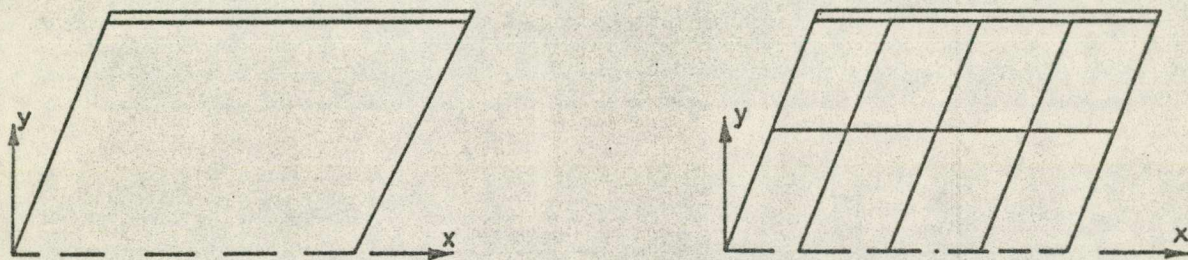
Sam program FEAPS je aplikacija tega razvoja metode končnih elementov z uporabo elementov z več prostostnimi stopnjami na račun rebrastih in gladkih plošč. Za elemente, ki jih uporabljamo pri računu plošč se uporablja za pomike elementov nastavek v obliki popolnega polinoma 5. stopnje in jih lahko kombiniramo z elementi stene, ki jih uporabljamo za rebra. Posebni podporni elementi - elastični elementi omogočajo na zelo enostaven način obravnavo plošč na stebrih, v katere so plošče vpete ali pa členkasto priključene. Podpore - stebri so lahko poljubno elastično podajne ali nepodajne. Ker program uporablja elemente z velikim številom prostostnih stopenj lahko že z eno razdelitvijo konstrukcije (plošče) v relativno majhno število elementov dosežemo zelo dobre rezultate. Posebej je treba poudariti, da je program zelo bogato programiran glede izbire izpisov rezultatov.

Posebna pozornost pri izdelavi programa je bila posvečena vhodnim podatkom, kajti le enostavna priprava podatkov omogoči inženirju čim boljše in hitrejšo uporabo vsakega programa. Vsi znani programi kot so STRESS, STRIP, EASE ipd. imajo vhodne podatke prirejene na osnovi orientiranih točk (koordinat točk). Takšni podatki vedno zahtevajo podatke o globalnih koordinatah točk, torej zahtevajo geometrijo točk, šele te točke omogočajo določitev lege elementov v mreži. Pri takšnem podajanju je treba vsak element opisati, na katere točke je povezan. FEAPS pa vse podatke o konstrukciji bazira na t.i. "orientiranih elementih", ki vse vhodne podatke v primerjavi z ostalimi načini zelo poenostavijo. Podatki na osnovi orientiranih elementov bazirajo na principu razdelitve konstrukcije (plošče) v kolone. Takšna poenostavitev vhodnih podatkov omogoča, da je program FEAPS brez težav uporaben za praktično računanje plošč. Celotni sistem plošče se razdeli na elemente - štirikotne ali trikotne - torej na elemente z enostavno geometrijo. Tako lahko s preudarno razdelitvijo dosežemo majhno število različnih tipov elementov, ki se ponavljajo. In podatki o geometriji so potem omejeni samo na število tipov elementov in ne na število vseh elementov ali celo točk.

2,0 METODA KONČNIH ELEMENTOV

Kakor je bilo že v uvodu povedano, za večino primerov problemov v statiki plošč ni možno najti ustreznih analitičnih rešitev. Za te primere danes uporabljamo numerične metode in to v glavnem metodo končnih elementov, po kateri razdelimo konstrukcijo na končno število elementov. V sliki 1. je prikazan eden izmed možnih načinov razdelitve plošče na končne elemente, ki so v tem primeru, ko je konstrukcija enostavna, po obliki enaki in to so paralelogrami.

Elementi, na katere je plošča razdeljena, v tem primeru paralelogrami, so med seboj povezani samo v vozliščnih točkah. Za potek pomikov posameznega elementa moramo izbrati določene (odgovarjajoče) nastavke.



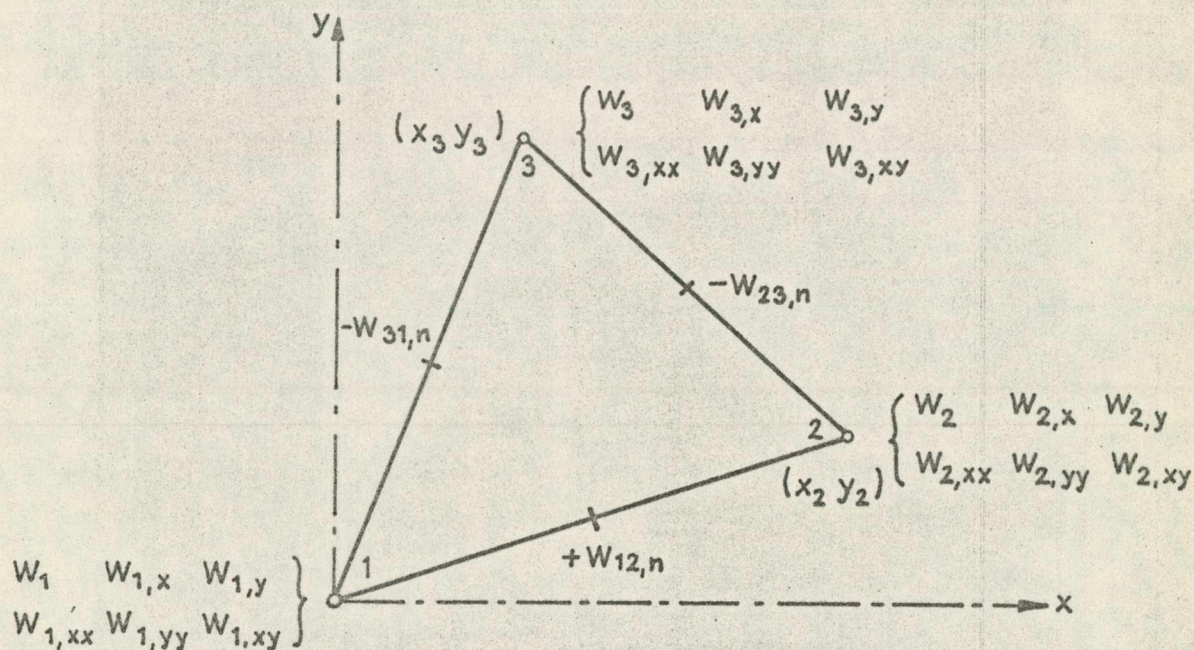
Sl. 1. Razdelitev konstrukcije na končne elemente

Predpostavimo n.pr. lahko, da upogibno ploskev elementa plošče opišemo s popolnim polinomom 5. stopnje:

$$\begin{aligned}
 w(x,y) = & A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2 + A_7x^3 + \\
 & + A_8x^2y + A_9xy^2 + A_{10}y^3 + A_{11}x^4 + A_{12}x^3y + \\
 & + A_{13}x^2y^2 + A_{14}xy^3 + A_{15}y^4 + A_{16}x^5 + A_{17}x^4y + \\
 & + A_{18}x^3y^2 + A_{19}x^2y^3 + A_{20}xy^4 + A_{21}y^5
 \end{aligned} \quad (1)$$

Ker so posamezni elementi povezani samo v vozliščih, poizkusimo prejšnji nastavek transformirati na vozliščne deformacije. V ta namen vpeljemo vozliščne deformacije $\{\delta\}$, katerih število se mora ujemati s številom koeficientov - konstant A_i v polinomu [1]. Ker ima popolni polinom 5. reda 21 konstant A_i , lahko in moramo v tem primeru uvesti 21 vozliščnih količin, med katerimi so lahko tudi zasuki in višji odvodi.

Na sliki 2. je prikazan TRIKOTNI ELEMENT plošče z 18 vozliščnimi deformacijami, ki jih običajno imenujemo vozlišče prostostnje stopnje ter z 3 količinami v središčih stranic, ker pa lahko eliminiramo 3 količine v središčih stranic, nam ostane element, ki je opisan samo z vozliščnimi deformacijami.



Sl. 2 Trikotni element z 21 prostostnimi stopnjami

V sl.2 oznaka $w_{1,x}$ pomeni $w_{1,x} = \frac{\partial w}{\partial x}$ v točki 1 in na podoben način je treba tolmačiti tudi pomen ostalih količin in oznak.

Če želimo iz nastavka za $w(x,y)$ izračunati vzdolžne deformacije $\{\delta\}$ dobimo sistem linearnih enačb, v katerih izrazimo koeficiente $\{A_i\}$ z $\{\delta\}$. Tako lahko izraz za $w(x,y)$ zapišemo tudi v obliki

$$w(x,y) = \{N(x,y)\}^T \cdot \{\delta\} \quad (2)$$

V splošnem dobimo za vektor pomikov sledeč izraz

$$\{u(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3)$$

in zvezo

$$\{u(x,y)\} = [N(x,y)] \{\delta\} \quad (4)$$

iz (4) pa dobimo po znanih zakonih elastostatike deformacije

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta u}{\delta x} \\ \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \end{array} \right\} = [D] \cdot \{\delta\} \quad (5)$$

V zgornjih izrazih nam izraz $[D]$ predstavlja deformacijsko matriko, ki jo dobimo z ustreznim odvajanjem oblikovnih funkcij $[N]$.

Če poznamo deformacije lahko enostavno s pomočjo Hookovega zakona napišemo izraze za napetosti

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} = [C] \cdot [D] \cdot \{\delta\} \quad (6)$$

Za vsako stanje pomikov $\{u\} \neq \{0\}$ so vozliščni pomiki $\{\delta\} \neq \{0\}$ torej so tudi vozliščne sile $\{f\} \neq \{0\}$. Torej nas zanima zveza med vozliščnimi pomiki $\{\delta\}$ in vozliščnimi silami $\{f\}$. Na osnovi porabe principa virtualnih pomikov dobimo med statičnimi količinami in deformacijami v vozliščnih točkah sledečo zvezo

$$\{f\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (7)$$

kjer nam $[k]$ predstavlja togostno matriko sistema, ki jo lahko izrazimo

$$[k] = \int_V [D]^T \cdot [C] \cdot [D] \cdot dV$$

Stolpec togostne matrike ustreza vozliščnim silam, ki nastanejo, če za odgovorajajoče pomike vozlišč vstavimo vrednost 1, medtem ko imajo vsi ostali pomiki vrednost 0.

V vsakem vozlišču mora biti izpolnjen pogoj ravnotežja med vozliščnimi silami $\{f\}$ in zunanjo obtežbo $\{p\}$. S principom virtualnih pomikov lahko

vedno poljubno porazdeljeno obtežbo po elementu nadomestimo z ekvivalentno vozliščno točkovno obtežbo. Pri sestavljanju elementov v nosilno konstrukcijo seštevamo deleže vozliščnih sil podane z enačbo (7), tako dobimo globalno togostno matriko $[K]$ in globalne vozliščne sile $\{F\}$, ki so povezane z globalnimi vozliščnimi prostostnimi stopnjami $\{\Delta\}$ z enačbo

$$\{F\} = [K] \cdot \{\Delta\} \quad (9)$$

Če označimo še globalno vozliščno obtežbo s $\{P\}$ sledi iz ravnotežnih pogojev sledeča enačba:

$$\{F\} - \{P\} = 0$$

ali

$$[K]\{\Delta\} - \{P\} = 0 \quad (10)$$

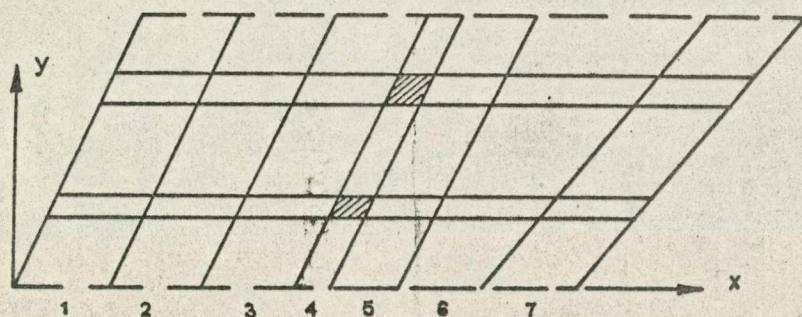
V enačbi konstrukcije (10) sta matriki $[P]$ in $[K]$ znani. Ob upoštevanju ustreznih ROBNIH POGOJEV in OBREMENITVE konstrukcije lahko iz enačbe (10) izračunamo VOZLIŠČNE POMIKE iz teh pa še potrebne notranje sile, momente oziroma napetosti v posameznih elementih konstrukcije.

Ker so neznanke sistema linearnih enačb (10) samo količine $\{\Delta\}$ - torej pomiki, imajo robni pogoji lahko le geometrijski značaj. Statični pogoji, kot so n.pr. nični momenti na prostem robu plošče, so v metodi avtomatično zajeti. Ker statične pogoje ne moremo predpisati lahko dobimo na robovih lokalne vplive robnih statičnih količin, ki pa so omejeni na zelo majhno področje. Z zgostitvijo mreže v bližini robu lahko vedno dosežemo, da tudi ti lokalni vplivi praktično izginejo.

Vse predhodne enačbe bi lahko izpeljali tudi s pomočjo principa o minimumu potencialne energije. Torej obstoji tesna zveza med rezultati računanja s končnimi elementi in energijskim izrazom. Pri podpornih elementih (stebrih), ki jih uporablja program FEAPS se vedno zahteva, da je delo napetostnih sil po celotni glavi stebra enako 0, kar moramo upoštevati pri interpretaciji rezultatov.

3.0 DOLOČITEV MREŽE ELEMENTOV TER TIPI ELEMENTOV

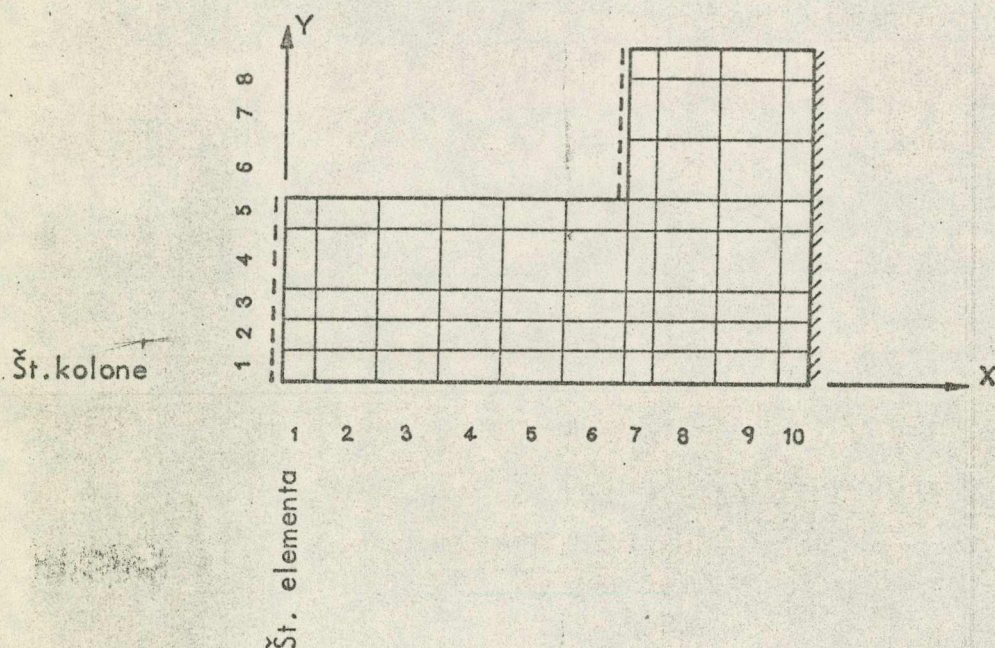
Program FEAPS uporablja za podajanje geometrije konstrukcije t.i. ORIENTIRANE elemente. Da se lahko poslužimo teh orientiranih elementov, na mesto koordinat vozlišč moramo nosilno konstrukcijo razdeliti v določeno število vertikalnih in horizontalnih kolon. Na sl. 3 je trapezna plošča podprta na dveh robovih razdeljena na 7 kolon v horizontalni smeri, vsaka kolona pa ima še 5 elementov. Ploščo navežemo na neki globalni koordinatni sistem x, y , ki je v principu lahko poljubno izbran.



Sl. 3. Razdelitev plošče na elemente

Iz sl.3 vidimo, da lahko razdeljeno konstrukcijo sestavimo iz različnih elementov enakega tipa, ki so geometrično in statično enakovredni. Na osnovi opisa teh posameznih tipov lahko sestavimo nosilno konstrukcijo brez kakršnih koli nadaljnjih podatkov o vozliščnih koordinatah. V začetku je treba v lokalnem koordinatnem sistemu podati podatke samo za vsak tip elementa, ne pa za vse elemente konstrukcije. Čim manj različnih tipov elementov je treba izbrati, tem enostavnejša in hitrejša je obdelava konstrukcije. Pri takem podajanju orientiranih elementov potrebujemo bistveno manj podatkov kot pa pri podajanju orientiranih vozlišč, kot to zahtevajo nekateri drugi programi. S takšnim načinom podajanja geometrije konstrukcije se bistveno zmanjša število podatkov in s tem se-

veda tudi možnost napak.



Sl. 4. Oštevilčenje kolon in elementov

Iz sl. 4. vidimo, da moramo kolone vedno označevati z leve proti desni v smeri pozitivne x osi. Elementi v posameznih kolonah so oštevilčeni v smeri pozitivne osi y. Z največjim številom elementov v eni izmed kolon je določena širina - velikost togostne matrike. Čas računanja konstrukcije direktno zavisi od širine pasu matrike, zato je treba pri razdelitvi konstrukcij na elemente paziti, da po možnosti dobimo kolone s čim manjšim številom elementov. V dodatku so prikazani nekateri značilni primeri za razdelitev konstrukcij v elemente. Osnovni princip postavljanja mreže je ta, da morajo vse kolone imeti elemente št. 1 in na njih navezано nadaljne število elementov v posameznih kolonah pa je lahko poljubno. Povezava od elementa št. 1 v vsaki koloni do zadnjega mora biti kontinuirna torej brez vmesnega prečkinjanja. V primeru, če imamo opravka z odprtini v plošči uporabimo prav tako elemente, katerih debelino pa predpišemo, da je enaka 0.

4.0 ELEMENTI

Program FEAPS uporablja kot osnovne končne elemente sledeče:

- štirikotni element plošče
- štirikotni element stene
- štirikotni element plošče na elastični podlagi
- trikotni element plošče
- trikotni element stene
- gradni element

Pri trikotnih elementih zopet še ločimo naprej trikotne elemente z vrhom na levi strani kolone in trikotne elemente z vrhom na desni strani kolone. Prav tako nadalje razlikujemo gredne elemente za vzdolžna in prečna rebra.

Različne velikosti in oblike zgornjih elementov nam dajo posamezne "TIPE" elementov, iz katerih tvorimo (sestavimo) nosilno konstrukcijo. Neko konstrukcijo lahko n.pr. razdelimo na same štirikotne elemente, ki pa so različne velikosti in z različnimi koti med stranicami, kolikor je teh štirikotnih elementov različnih, toliko "TIPOV" štirikotnih elementov konstrukcija ima, podobno velja za ostale oblike elementov. Število tipov elementov naj bo čimmanjše, kajti s tem imamo čimmanj vhodnih podatkov in tem krajši je čas računanja.

Program FEAPS dopušča, da je lahko vsak tip elementa iz drugačnega materiala, to praktično pomeni, da je lahko vsak del (tudi element) neke konstrukcije iz poljubnega materiala. Pri tem lahko upoštevamo izotropne in ortotropne lastnosti materiala. Gredni elementi so lahko ekscentrično priključeni na elemente plošč in sten, kar n.pr. program EASE ne dopušča. Takšna ekscentrična priključitev omogoči, da lahko s tem programom računamo tudi rebraste plošče.

Topološki podatki podajajo medsebojno lego elementov v konstrukciji. Program FEAPS omogoča pri podajanju podatkov topologije generiranje v horizontalni in vertikalni smeri. Da pa lahko čim več kolon in

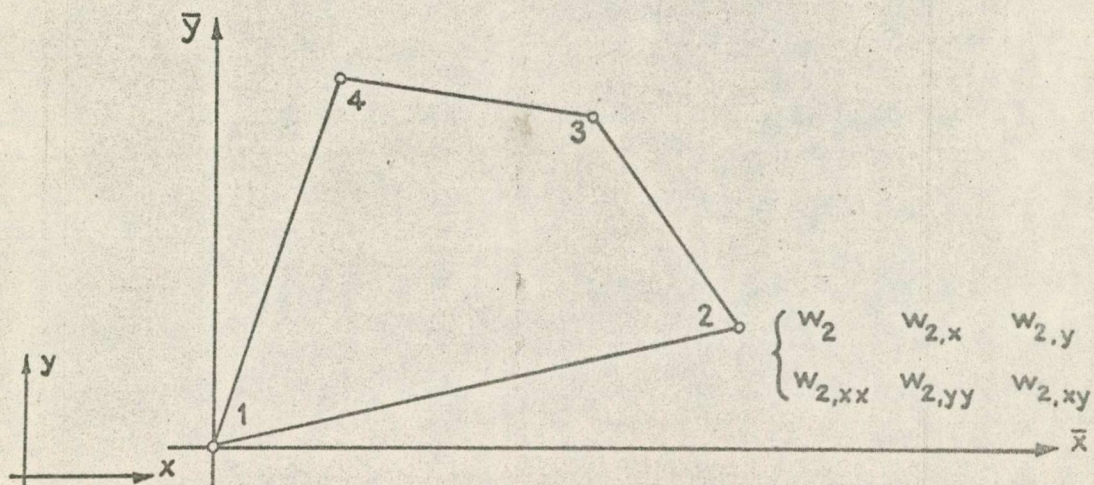
elementov generiramo je zaželeno izbrati po možnosti čim manjše število različnih tipov elementov.

S prvim podatkom - ukazom na prvi kartici "PLATTE" ali "RIPPENPLATTE" program avtomatično določi, da v prvem primeru računa samo z elementi plošč, ker v tem primeru se obravnavajo samo gladke plošče, v drugem primeru pa računa z elementi plošč in stene, ker v tem slučaju gre za obdelavo rebrastih plošč.

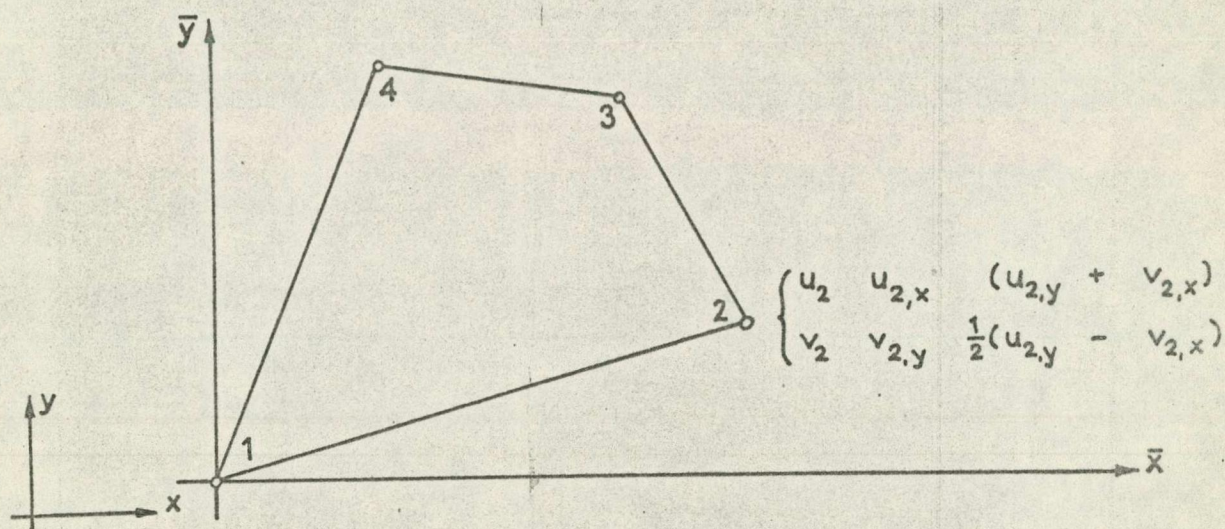
4.1 Štirikotni elementi

4.11 Navadni štirikotni elementi - VK - elementi

Pri računu plošč običajno uporabljamo štirikotne elemente. Ker imajo štirikotni elementi zelo veliko prostostnih stopenj običajno nam zadošča za praktičen izračun še zelo groba mreža razdelitve konstrukcije



Sl. 5. Štirikotni element plošče



Sl. 6. Štirikotni element stene

Sliki 5 in 6 prikazujeta štirikotna elementa plošče in stene v lokalnem koordinatnem sistemu $\bar{x}, \bar{y}$ ki leži paralelno z globalnim koordinatnim sistemom x, y . Za vozliščno točko št. 2 so prikazane prostostne stopnje tega vozlišča. Oba štirikotna elementa lahko dobimo s sestavljanjem štirih trikotnih elementov in z eliminacijo notranjih prostostnih stopenj.

Pri štirikotnih elementih plošče je osnova za oblikovno funkcijo povosov $w(x, y)$ popolni polinom 5. stopnje. Ker imamo med prostostnimi stopnjami vozlišč tudi druge odvode povosov, lahko direktno določimo upogibne momente. Ker je oblikovna funkcija polinom 5. reda, ustreza potek momentov M_x , M_y in M_{xy} v notranjosti vsakega elementa polinomu 3. reda.

Štirikotni element stene nastane iz štirih trikotnih elementov stene. Vsaka od funkcij pomikov $u(x, y)$ in $v(x, y)$ je podana s polinomom 3. reda, iz tega sledi, da so osne sile N_x , N_y in N_{xy} v notranjosti elementa opisane s polinomom 2. reda.

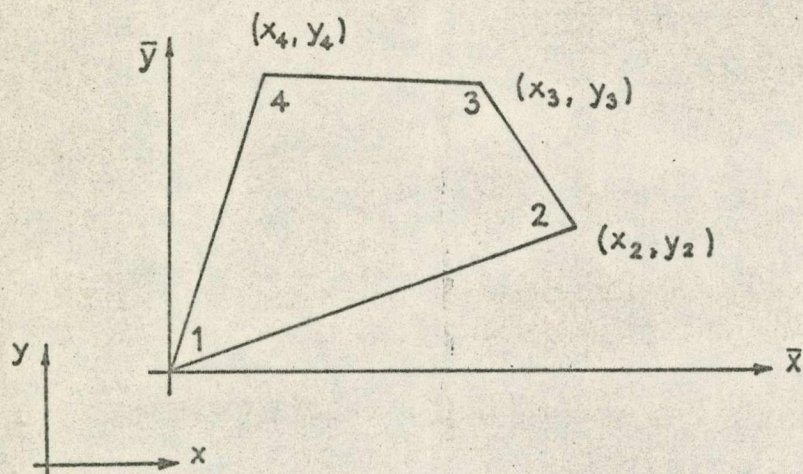
Oblika štirikotnega elementa je lahko poljubna (kvadrat, pravokotnik, paralelogram, trapez, raznostranični štirikotnik). Enoličnost elementa je določena s podatki o lokalnih vozliščnih koordinatah. Na točnost računa ne vpliva oblika elementa, ampak predvsem razmerje med minimalno in maksimalno dolžino stranice. To razmerje naj ne presega razmerja $1 : 5$. Geometrijo vsakega elementa opišemo v lokalnem koordinatnem sistemu $\bar{x}, \bar{y}$ (slika 4. in slika 5.). Oštevilčenje vozlišč mora vedno teči v nasprotni smeri urinega kazalca. Vozlišče št. 1 leži vedno v izhodišču lokalnega koordinatnega sistema. Podajanje geometrije štirikotnega elementa je možno na dva načina:

a) Podajanje vozliščnih koordinat (v lokalnem koordinatnem sistemu)

Tega načina podajanja se vedno poslužujemo pri splošnih štirikotnikih.

V tem primeru podamo koordinate vozlišč 2,3 in 4 (glej sl. 7) s

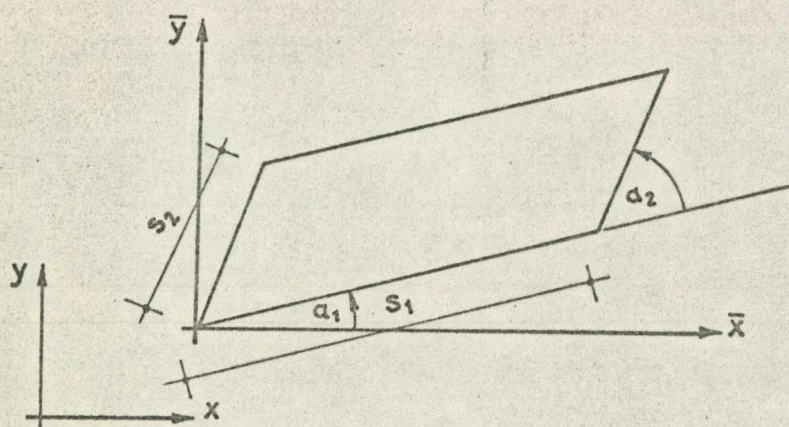
tem, da je izhodišče lokalnega koordinatnega sistema obvezno v vozlišču 1.



Sl. 7 . Način podajanja geometrije štirikotnega elementa s koordinatami.

b) Podajanje dveh dolžin stranic in dveh kotov

Ta način uporabljamo lahko le tedaj če imamo opravka z elementi, ki so paralelogrami. Vrstni red podajanja stranic in kotov je točno določen.



Sl. 8. Način podajanja geometrije štirikotnika z dolžinami stranic in koti.

4.12. Štirikotni elementi na elastični podlagi - VS - elementi

Uporaba VS-elementov pride v poštev vedno, kadar računamo plošče podprte s stebri ali plošče na elastičnih podporah n.pr. temeljna plošča na elastično podajnih tleh. Vertikalno podajnost podamo v obliki vzmetne konstante "c", pri tem upoštevamo predpostavko, da je podporna sila enakomerno porazdeljena po VS elementu. Na ta način lahko izračunamo deformacijsko delo podpornih sil pri pomikih w in iz tega dobimo odnos med podporno silo in povprečnim pomikom VS elementa

$$\delta = \frac{1}{F} \int w \cdot dF = \frac{1}{C} \cdot P ,$$

P = podporna sila

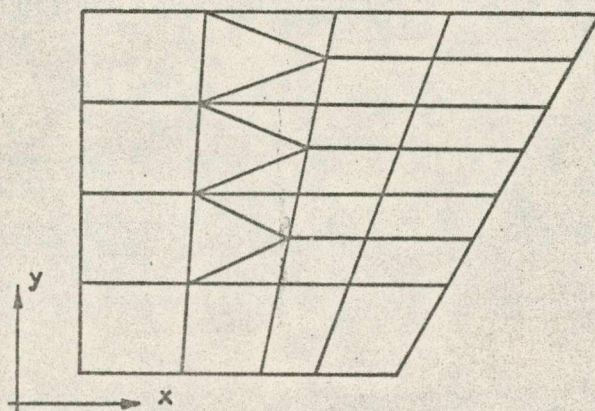
Za posebni primer če je $C = \infty$ / oziroma $C = 10^{+100}$) dobimo $\delta = 0$,

torej vertikalno nepomičen ampak vrtljivo podprt element. Primer če je $C \neq 0$ odgovarja normalnemu štirikotnemu elementu, ki ni podprt.

Geometrijo elastično podprtega štirikotnega elementa - VS podajamo na enake načine kot geometrijo za navadne štirikotne elemente VK, dodatni podatek na posebni kartici je še vrednost vzmetne konstante C .

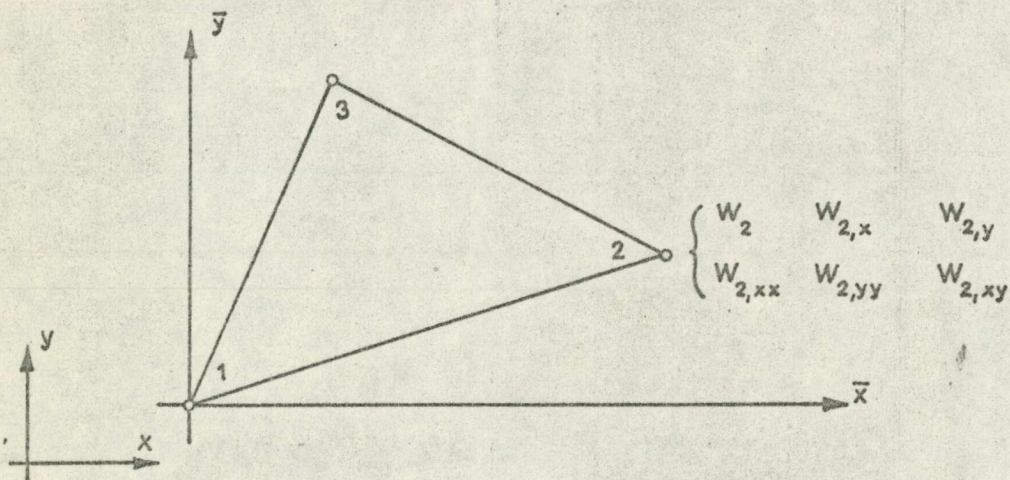
4.2 Trikotni elementi

Trikotne elemente običajno potrebujemo pri prehodu na gostejšo mrežo elementov (glej sl. 9), ta prehod uporabljamo le takrat če ni možno problem rešiti samo s štirikotnimi elementi. Sami štirikotni elementi so namreč pogojeni z manjšim številom podatkov, s krajšim časom račun in končno nam štirikotni elementi nudijo možnost dajanja rezultatov v ogliščih ali težišču elementa, medtem ko, če uporabljamo trikotne elemente lahko rezultate dobimo samo v ogliščih trikotnega elementa. Posebej pa je treba pri razdelitvi konstrukcije na mrežo imeti v vidu, da je možna zgostitev mreže s trikotnim prehodom samo v vertikalni smeri.



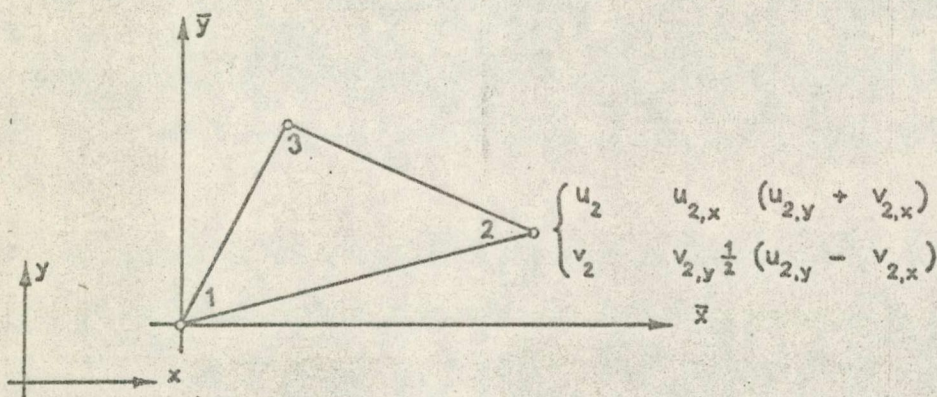
Sl. 9. Zgostitev mreže v vertikalni smeri

Na sliki 10. in 11. sta prikazana trikotna elementa za plošče in stene. Elementa sta podana v lokalnem koordinatnem sistemu, ki je uporaben z globalnim sistemom.



Sl. 10. Trikotni element plošče

Ker so trikotni elementi osnova za štirikotne elemente, morajo imeti enake nastavke za vozliščne prostostne stopnje. Tako pri trikotnem elementu plošče opisujemo upogibno ploskev $w(x,y)$ s polinomom 5. reda medtem ko je pri trikotnem elementu stene nastavek za pomike $u(x,y)$ in $v(x,y)$ polinom 3. reda.



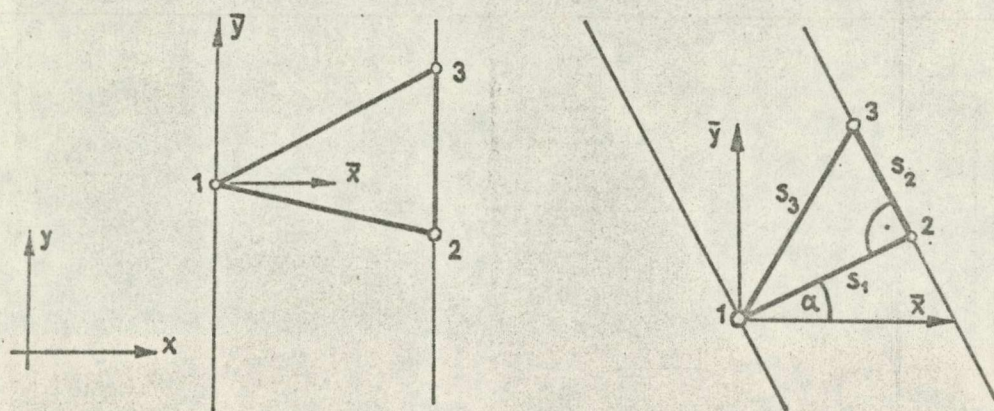
Sl. 11. Trikotni element stene

Trikotne elemente delimo na:

- trikotnike z vrhom levo
- trikotnike z vrhom desno.

4.21 Trikotni element z vrhom levo - DL - element

Pri trikotnikih z vrhom levo leži eno samo oglišče na levi strani kolone, to oglišče je označeno s številko 1 (glej sl. 12)



Sl. 12. Trikotni element z vrhom levo

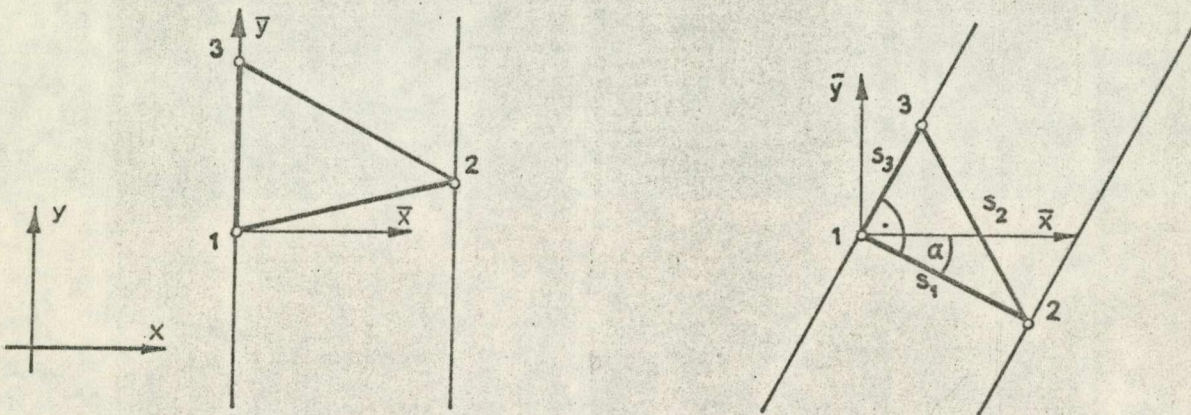
Geometrijo trikotnega elementa z vrhom levo lahko podamo na oba načina:

- Podajanje vozliščnih koordinat v lokalnem koordinatnem sistemu. Ta način podajanja vedno uporabljamo za splošne trikotnike. Potrebni podatki so koordinate 2. in 3. vozlišča v lokalnem koordinatnem sistemu $\bar{x}, \bar{y}$. Vozlišče 1 vedno leži v koordinatnem izhodišču lokalnega koordinatnega sistema.
- Podajanje dolžin dveh stranic in enega kota. Ta način podajanja podatkov lahko uporabljamo samo za pravokotne trikotnike.

Pri trikotnikih z vrhom levo mora ležati pravi kot med stranicama S_1 in S_2 . Podati moramo obe dolžini S_1 in S_2 in kot α med stranico in lokalno osjo $\bar{x}$. Kot α je pozitiven v nasprotni smeri urinega kazalca. (glej sl. 12)

4.22 Trikotni element z vrhom desno - DR - element

Pri trikotnikih z vrhom desno leži eno samo oglišče na desni strani kolone. To oglišče je označeno s številko 2. (glej sl. 13).



Sl. 13. Trikotni element z vrhom desno

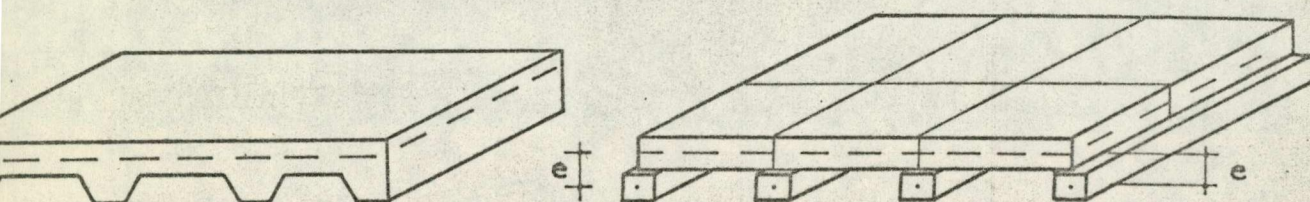
Tudi pri teh trikotnih elementih je možno podajati podatke na dva načina.

- a.) Podajanje vozliščnih koordinat - vse enako kot pri trikotnikih z vrhom levo
- b.) Podajanje dolžin dveh stranic in enega kota (samo pravokotni trikotniki)
Pravi kot leži med stranicama S_1 in S_3 . Podati pa je treba S_1 , S_3 in α (glej sl. 13.)

4.3. Gredni elementi

Za računanje rebrastih plošč potrebujemo gredne elemente, ki so lahko ekscentrično priključeni. Pri ekscentričnem priključku se pojavijo v plošči tudi osne sile. Čim se na prvi kartici podatkov pojavi ukaz RIPPENPLATTE program FEAPS avtomatično vključi elemente stene.

Na sl. 14 je prikazana razdelitev rebraste plošče na elemente plošče in elemente stene kot tudi na gredne elemente (rebra). Rebra imajo dvojno simetrični prečni prerez in so ekscentrično priključena na ploščo. Pri tem je ekscentriteta "e" razdalja med osjo rebra in srednjo ravnino plošče.



Sl. 14. Razdelitev rebraste plošče na elemente

Pri grednem elementu predpostavimo pomike v navpični smeri v obliki polinoma 5. reda, v vzdolžni smeri pa privzamemo polinom 3. reda. Torzijska in prečna upogibna togost rebra v teh nastavkih nista upoštevana.

Za podajanje grednih elementov potrebujemo naslednje količine:

- ploščino prečnega prereza rebra
- vztrajnostni moment rebra
- označbo materiala rebra
- ekscentričnost rebra z ozirom na srednjo ravnino plošče
- stranico elementa, na katero je rebro priključeno

Pri mrežni razdelitvi konstrukcije na elemente grednih elementov ni potrebno posebej označiti. Pri oštevilčenju elementov jih tudi ne štejemo kot samostojne elemente.

Pri podajanju podatkov pa moramo razlikovati prečne in vzdolžne gredne elemente. Pri določevanju stranic elementov plošče na katere so priključena rebra, moramo obvezno upoštevati sledeče navodilo:

Gredni elementi, ki potekajo prečno na kolone so lahko priključeni le na stranici številka 1 štirikotnih oziroma trikotnih elementov. Gredne elemente, ki pa potekajo paralelno s kolonami, pa jih lahko priključimo samo na stranico 4 štirikotnih elementov oziroma na stranico 3 trikotnih elementov. Robne gredne elemente na zgornjem oziroma skrajnem desnem robu plošče lahko podamo le s pomočjo t.i. "Dummy - elementov". Dummy-elementi so dodatni namišljeni elementi, ki jih sicer ne podajamo. Tako bi n.pr. na koncu kolone petih elementov priključili prečni gredni element na dodatni šesti element, ki ga pri geometriji in topologiji plošče nismo podali. Robne gredne elemente na desni strani desete kolone elementov pa bi priključili na namišljeno enajsto kolono.

Zaradi ekscentrično priključenih grednih elementov dobimo v plošči tako osne sile kot momente. Ker so ravnotežne enačbe postavljene z ozirom na os plošče, dobimo tudi rezultate za os plošče. Notranje količine v rebrih dobimo z redukcijo notranjih sil v plošči na os rebra, kar je treba upoštevati pri interpretaciji rezultatov.

5.0 TOPOLOGIJA

Pri podajanju podatkov za topologijo gre za to, da dano konstrukcijo sestavimo iz različnih tipov elementov. To naredimo tako, da za vsak določen element neke kolone podamo njegov tip in to po vrstnem redu od elementa št. 1 do zadnjega elementa v neki koloni.

Podajanje topologije lahko zelo poenostavimo s tem, da generiramo posamezne tipe elementov.

Generiranje lahko izvedemo najprej v elementih v kolonah, nato pa še po kolonah če so si enake.

- generiranje v kolonah, s podatki povemo koliko enakih tipov elementov si sledi v določeni koloni
- generiranje po kolonah, s podatki povemo številko zadnje kolone, ki je sestavljena enako kot je bila podana zadnja kolona.

S topologijo sestavljamo konstrukcijo iz elementov vedno tako, da začnemo v prvi koloni s prvim elementom in gremo po prvi koloni po vrsti do zadnjega elementa, nato isto nadaljujemo po vrsti z ostalimi kolonami ter pri tem upoštevamo vse možnosti za generiranje. Osnovno pravilo topologije (glej sl. 15) naj bo, da vedno k spodnjemu elementu dodamo zgornjega in k levemu elementu desnega. S topologijo torej elemente zlagamo v mrežo vedno od spodaj navzgor in z leve na desno.

Gredne elemente razmestimo po stranicah elementov plošče šele, ko so podani vsi elementi plošče. Pri grednih elementih podamo najprej tiste, ki so prečno na smer kolon.

Na osnovi geometrijskih in topoloških podatkov program avtomatično preverja, ali se dajo posamezni elementi sestaviti v obravnavano konstrukcijo.

Primer podajanja topologije:

5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Sl. 15 Shematični prikaz podajanja topologije

Vrstni red podatkov za topologijo (glej sl. 15):

- podamo štirikotni tip 1 (levo spodaj)
- generiramo prvi element do kolone 11
- podamo štirikotni tip 2 v prvi koloni
- generiramo najprej tip 2 v koloni 1 do elementa št.4
- sedaj pa generiramo celo širino pasu elementa tipa 2 do 11 kolone
- podamo štirikotni tip 1 v prvi koloni
- generiramo do kolone 11

Ker smo s tem postavili vse elemente v mrežo konstrukcije lahko preidemo k podajanju grednih elementov

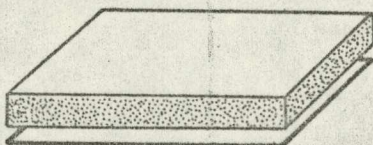
- Najprej podamo gredne elemente prečno na kolone
- Končno podamo še gredne elemente paralelne s kolonami.

6.0 OBTEŽBA

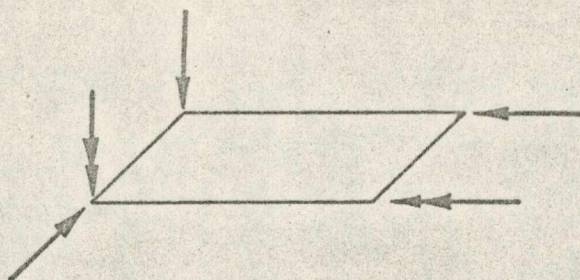
FEAPS lahko upošteva poljubno število obtežnih primerov. Vsak obtežni primer pa je lahko sestavljen iz različnih obtežb. Kadar želimo posamezne obtežne primere med seboj kombinirati, lahko v takšni kombinaciji naenkrat upoštevamo največ 12 obtežnih primerov. Podajanje obtežbe je prav tako orientirano po elementih.

Program FEAPS lahko upošteva sledeče obtežbe:

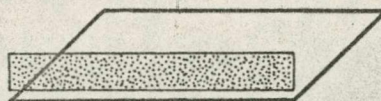
- enakomerno vertikalno obtežbo po vseh elementih plošče
- enakomerno vertikalno obtežbo po posameznem elementu



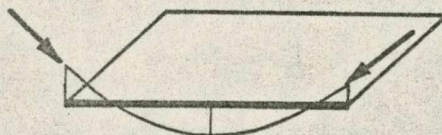
- koncentrirane vozliščne obtežbe in sicer:
- sile v vseh treh globalnih koordinatnih smereh
- momenti okoli x in y osi
- ukrivljenosti w_{xx} , w_{yy} in w_{xy} za izračun vplivnic
- obtežbe po robu elementa (linijske obtežbe) v vertikalni smeri za stranici 1 in 4 pri štirikotnikih ter za stranici 1 in 3 pri trikotnikih (samo sile)



Robne obtežbe na zgornjem in desnem robu konstrukcije lahko lahko podamo s pomočjo Dummy-elementov.



- prednapetje robov št. 1 in 4 pri štirikotnih elementih oziroma robov št. 1 in 3 pri trikotnih elementih. Za vsako stranico elementa moramo podati ekscentričnost osi kabla na začetku, v sredini in na koncu. Program iz tega avtomatično izračuna namomestno obtežbo, ki ustreza paraboli 2. reda. Prednapetje za zgornje in skrajno desne robove lahko upoštevamo s pomočjo Dummy-elementov.



- predpisani pomiki vozlišč elementov
- kombinacije obtežnih primerov

7.0 ROBNİ POGOJI

Vsakemu vozlišču elementa lahko predpišemo katerega koli izmed spodaj navedenih robnih pogojev. Za plošče imamo 6 prostostnih stopenj, ki jih lahko predpišemo :

- w povs v smeri osi z
- w_x prvi odvod upogibne ploskve po x , t.j.
 zasuk v smeri x
- w_y prvi odvod upogibne ploskve po y , t.j.
 zasuk v smeri y
- w_{xx} drugi odvod po x , t.j. zakrivljenost v smeri x
- w_{yy} drugi odvod po y , t.j. zakrivljenost v smeri y
- w_{xy} mešani odvod - Gaussova ukrivljenost, vegavost

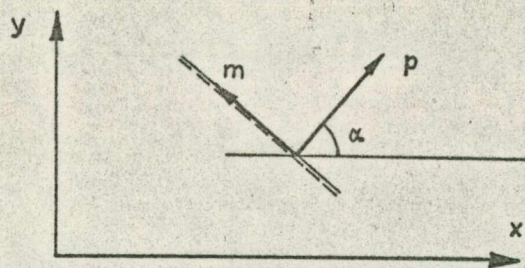
Za rebrasto ploščo pa lahko nadalje predpišemo še šest prostostnih stopenj.

- u pomik v smeri x
- v pomik v smeri y
- u_x prvi odvod pomikov u (specifično deformacijo $_{xx}$)
- v_y specifična linearna deformacija v smeri osi y
- $u_y + v_x$ kotna deformacija
- $\frac{1}{2}(u_y - v_x)$ - povprečna rotacija v ravnini x, y

Vsako izmed zgoraj navedenih prostostnih stopenj lahko neodvisno eno od druge predpišemo. Če pa želimo uvesti določeni fiksni pomik moramo uvesti ustrezno vzmetno konstanto.

Pri predpisovanju robnih pogojev uporabljamo kodi 0 in 1. Znak 0 pomeni, da ustrezna prostostna stopnja ni predpisana, koda 1 pa brez posebnega dodatka o vzmetni togosti pomeni, da je vrednost ustrezne prostostne stopnje enaka nič. Elastične robne pogoje lahko upoštevamo s tem, da podamo vzmetno togost, ki je večja od 10^{-100} .

Robne pogoje lahko podajamo tudi v zasukanem koordinatnem sistemu (p, m) , na mestu x stoji p in namesto y m .



8.0 MATERIALI

Program FEAPS omogoča obravnavanje nosilnih konstrukcij, ki so sestavljene iz izotropnih in (ali) ortotropnih materialov. Praktično je lahko vsak element iz drugega materiala. Za izotropne materiale zadošča podatek o elastičnem modulu in Poissonov količnik.

Momente v plošči izračunamo po znanih enačbah:

$$M_x = -k(w_{,xx} + \mu \cdot w_{,yy})$$

$$M_y = -k(w_{,yy} + \mu \cdot w_{,xx}) \quad k = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)}$$

$$M_{xy} = -k(1 - \mu) \cdot w_{,xy}$$

Za ortotropne materiale pa moramo podati elastične matrike za ploščo oziroma za steno:

$$M_x = p_{11} \cdot w_{,xx} + p_{12} \cdot w_{,yy}$$

$$M_y = p_{12} \cdot w_{,xx} + p_{22} \cdot w_{,yy}$$

$$M_{xy} = p_{33} \cdot w_{,xy}$$

$$N_x = s_{11} \cdot u_{,x} + s_{12} \cdot v_{,y}$$

$$N_y = s_{12} \cdot u_{,x} + s_{22} \cdot v_{,y}$$

$$N_{xy} = s_{33} \cdot (u_{,y} + v_{,x})$$

9.0 REZULTATI

9.1 Rezultati za plošče

Vse rezultate dobimo za srednjo ravnino plošče.

- Deformacije

pomiki

zasuki v smeri osi x

zasuki v smeri osi y

ukrivljenost v smeri x

ukrivljenost v smeri y

vegavost

w

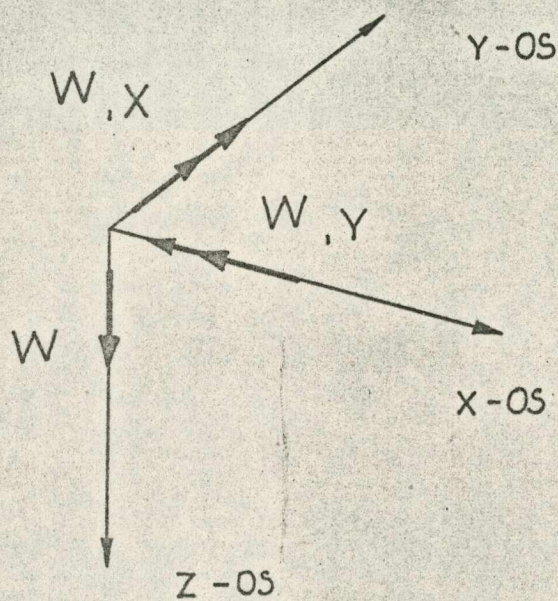
$w',_x$

$w',_y$

$w',_{xx}$

$w',_{yy}$

$w',_{xy}$



Slika 16. prikaz pomikov

- Momenti

momenti zaradi napetosti

x

M_x

momenti zaradi napetosti

y

M_y

torzijski momenti zaradi

napetosti

xy

M_{xy}

glavni momenti
smeri glavnih momentov

M1, M2
 α

Definicije:

$$M_x = -k(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

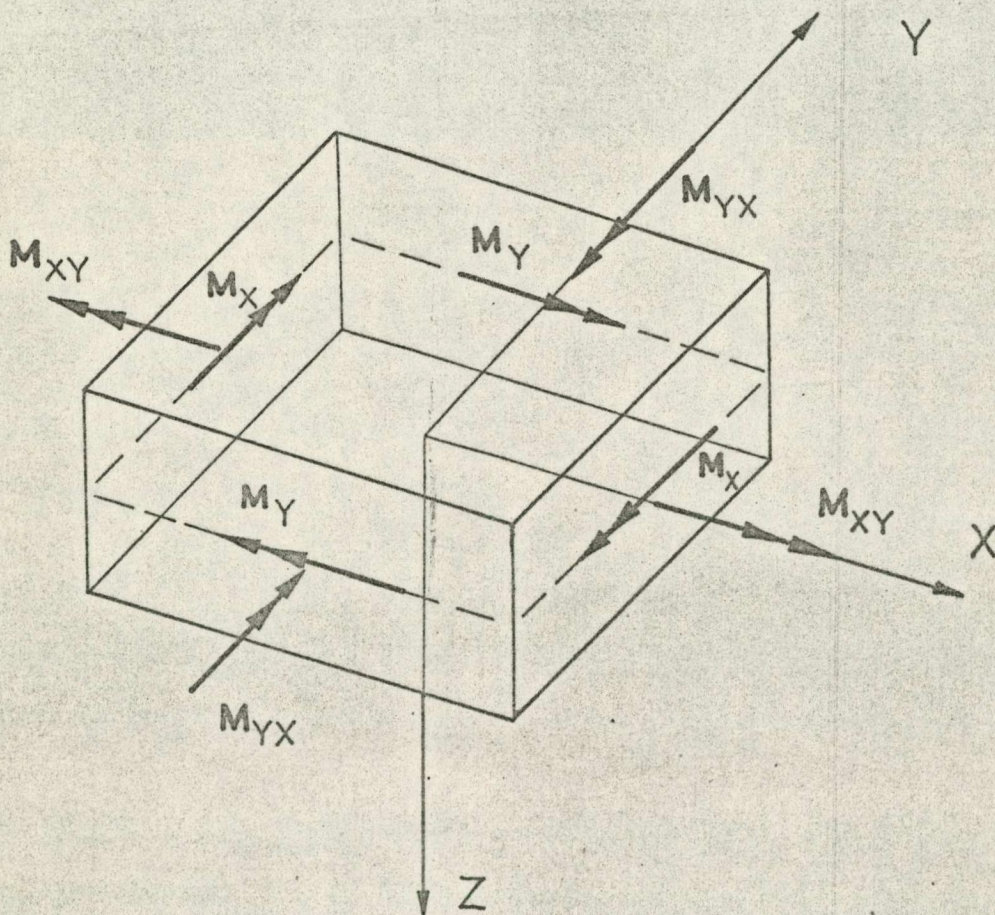
$$M_y = -k(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz$$

$$M_{xy} = -k(1 - \nu) \cdot w_{,xy} = \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz$$

kjer pomeni $k = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ upogibno togost plošče.

Momenti plošče so podani v naslednjih enotah:

$$[\text{MOMENT}] = \left[\frac{\text{SILA} \cdot \text{DOLŽINA}}{\text{DOLŽINA}} \right] = [\text{SILA}]$$



Sl. 17 Notranje sile v plošči

- Reakcije v podporah

navpične podporne reakcije

reakcije zaradi M_x

reakcije zaradi M_y

reakcije zaradi M_{xy}

navpične reakcije v stebrih

Reakcije so podane kot točkovne sile v vozliščih in imajo naslednje dimenzije:

$$\begin{aligned} [\text{MOMENT}] &= [\text{SILA} \cdot \text{DOLŽINA}] \\ [\text{VERTIKALNA REAKCIJA}] &= [\text{SILA}] \end{aligned}$$

Reakcije so določene v istem koordinatnem sistemu, v katerem so podani robni pogoji.

9.2 Rezultati za rebraste plošče

K rezultatom za plošče dodamo še naslednje rezultate za stene:

- Dodatne deformacije

pomik v smeri osi x

u

pomik v smeri osi y

v

specifična linearna deformacija v smeri osi x

$u_{,x}$

specifična linearna deformacija v smeri osi y

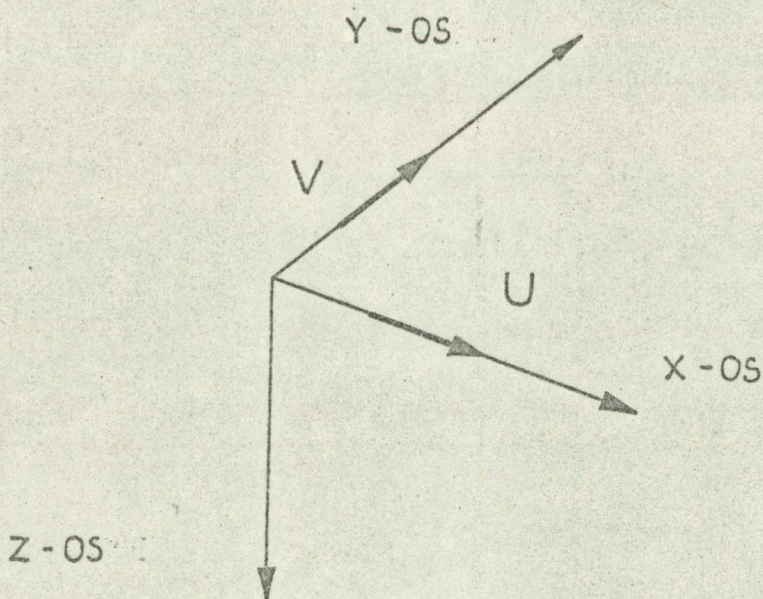
$v_{,y}$

kotna deformacija

$u_{,y} + v_{,x}$

povprečna rotacija

$\frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x})$



Sl. 18. Prikaz pomikov

- Dodatne membranske sile

membranske sile zaradi napetosti σ_x	NX
membranske sile zaradi napetosti σ_y	NY
membranske sile zaradi napetosti τ_{xy}	NXY
glavne sile	N1, N2
smeri glavnih sil	ALPHA

Definicije:

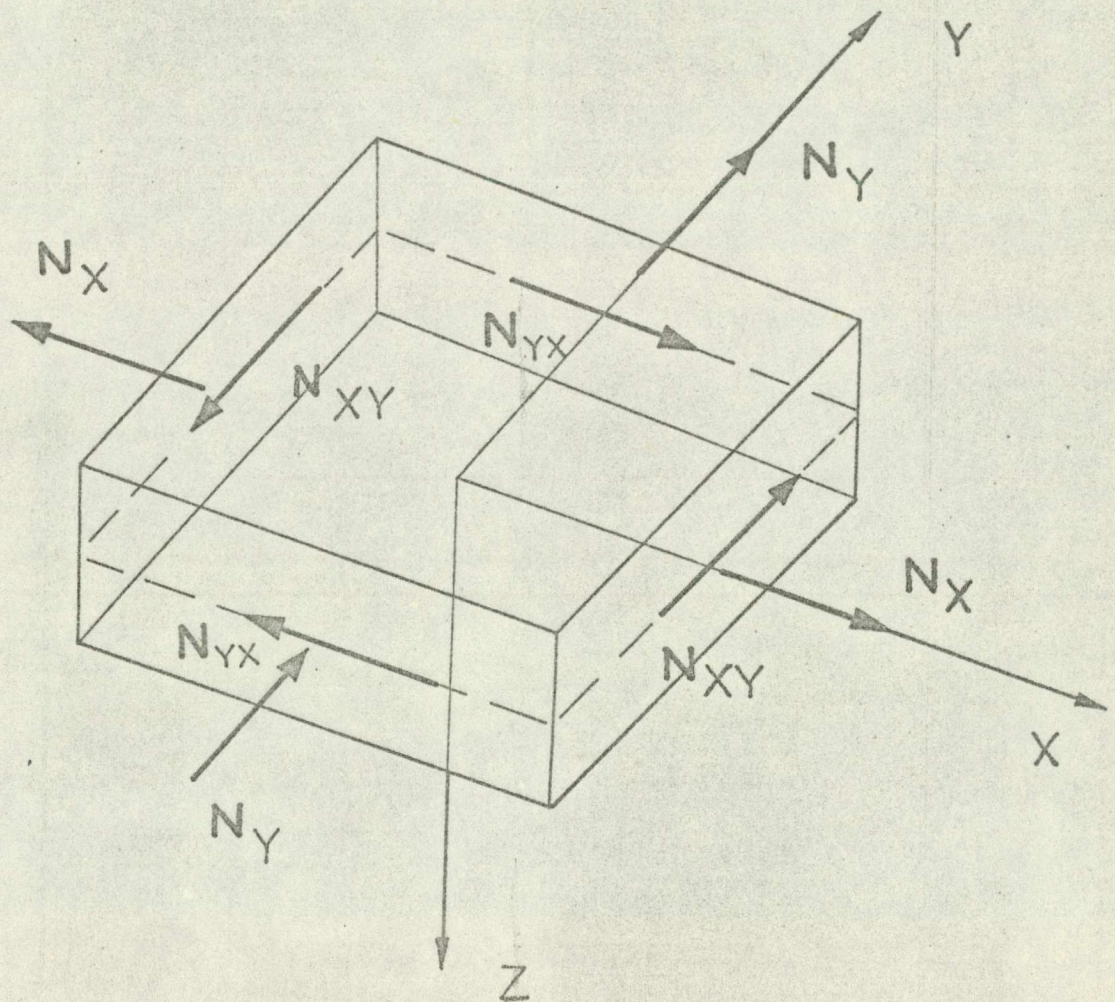
$$NX = \frac{E \cdot h}{1 - \nu} (u_x + \nu \cdot v_y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dz$$

$$NY = \frac{E \cdot h}{1 - \nu} (v_y + \nu \cdot u_x) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot dz$$

$$NXY = \frac{E \cdot h}{1(1-\nu)} (u_y + v_x) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dz$$

Dimenzije membranskih sil:

$$[\text{MEMBRANSKE SILE}] = \left[\frac{\text{SILA}}{\text{DOLZINA}} \right]$$



Slika 19 Notranje sile v steni

- Dodatne reakcije v podporah
 - reakcije zaradi N_X
 - reakcije zaradi N_Y
 - reakcije zaradi N_{XY}
 - reakcije zaradi N_{YX}

Dimenzije reakcij so:

$$[\text{REAKCIJE}] = [\text{SILA}]$$

ZAKLJUČEK

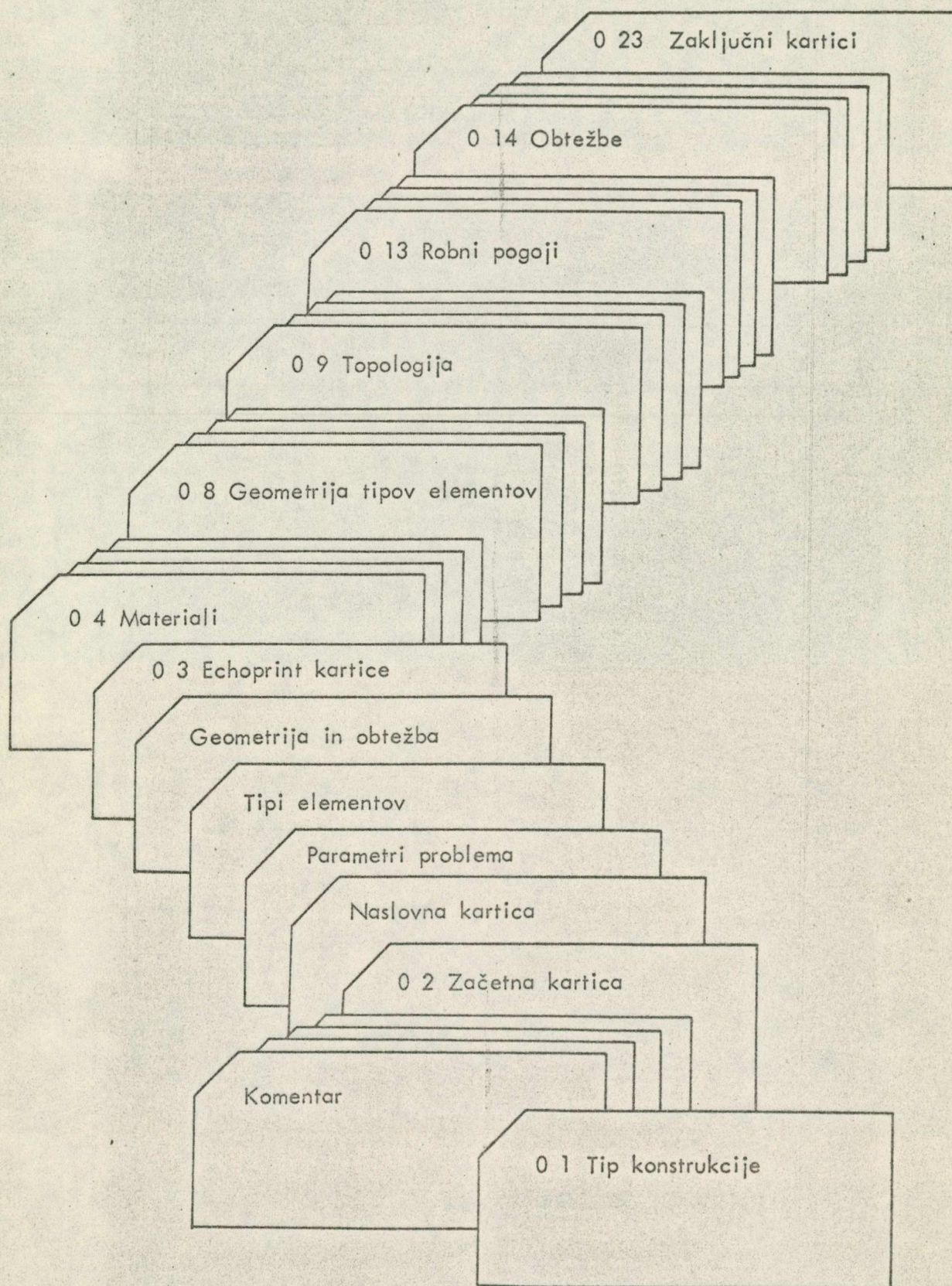
Predhodni opis programa FEAPS je bil narejen z namenom, da se statik kot konstrukter vsebinsko seznani z možnostmi, ki jih ta program nudi. Z vsebino tega dela naj bi seznani vsi, ki jim je do tega, da bi začeli na svojih delovnih mestih upeljevati novejša metode pristopa k računu neke konstrukcije. Posebej bi želeli na tem mestu poudariti, da enkratno uporaba takšnega ali podobnega programa ne more dati popolne slike o o prednostih uporabe le teh. Le stalna uporaba nudi statiku, da spoznava detajlneje možnosti, ki mu jih program nudi. Šele na osnovi določenih izkušenj bo se lahko ob vsakem novem problemu odločil za način in metodo izračuna določene konstrukcije.

Osnova opisa programa FEAPS je v glavnem citirana literatura, s tem da so v tekstu dodatno vnešene določene dopolnitve na osnovi izkušenj, ki smo jih dobili pri njegovi praktični uporabi v RC FAGG.

LITERATURA:

- 1.) FEAPS - Handbuch
- 2.) Giorgio A. Alberti: Berechnung von Platten und Rippenplatten nach der Methode der endlichen Elemente, ETH Zürich 1971.
- 3.) Jakovljevič Jelena: Diplomsko delo (Katedra za gradbeno mehaniko na FAGG) 1973
- 4.) Zienkiewicz, O.C: The Finite Element Method, Mc Graw - Hill, 1967

VRSTNI RED KARTIC S PODATKI



DODATEK: Primeri razdelitev konstrukcij na elemente

